На правах рукописи

Зверева Татьяна Витальевна

СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Столяров Алексей Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Малаховский Владислав Степанович
	кандидат физико-математических наук, профессор Султанов Адгам Яхиевич
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 29 сентября 2011 года в 14 часов 30 минут в ауд. 337 НИИММ им. Н. Г. Чеботарева на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» июня 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Липачев Е. К.
канд. физ.-мат. наук, доцент

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка вопроса и актуальность темы. Конформно-дифференциальная геометрия трехмерного пространства зародилась внутри классической дифференциальной геометрии в конце XIX века в работах Дарбу, Рибокура и других геометров.

В 1924 г. появляется работа Томсена [24], в которой для изучения конформно-дифференциальной геометрии поверхностей применяются пентасферические координаты и тензорное исчисление. Э. Картан [20] вводит понятие n-мерного пространства конформной связности. В это же время теория многомерных пространств конформной связности разрабатывается в работах Т. И. Томаса, И. М. Томаса и ряда других геометров. С. Сасаки в 1939–40 гг. развивает теорию кривых и гиперповерхностей в пространстве конформной связности. К. Яно в работах [26], [27] изучает конформную геометрию m-мерной поверхности в n-мерном римановом пространстве, строит инвариантные тензоры, связанные с ее окрестностью второго порядка. А. Фиалков [22] в 1944 г. построил полную систему конформно-инвариантных тензоров m-мерной поверхности n-мерного риманова пространства. Однако в большинстве перечисленных работ конформно-дифференциальная геометрия многомерных поверхностей строится средствами евклидовой и римановой геометрий, что сильно осложняет геометрическое истолкование полученных результатов.

Новый этап в развитии конформно-дифференциальной геометрии связан с работами отечественных геометров, а именно, с работами с применением к конформной геометрии общей теории образов симметрии в однородных пространствах Б. А. Розенфельда [12], общей теории нормализованных поверхностей А. П. Нордена [9], [10], общей теории многообразий в однородных пространствах и в пространствах со связностями Г. Ф. Лаптева [5], [6].

Метод Г. Ф. Лаптева был применен М. А. Акивисом [1], [2] к построению основ инвариантной теории гиперповерхностей, m-мерных поверхностей n-мерного конформного и псевдоконформного пространств. А. П. Норден [3], [9], [10] получил существенные результаты по конформно-дифференциальной геометрии различных подмногообразий. В работах А. В. Столярова [13], [14] изучается внутренняя геометрия ряда подмногообразий конформного пространства C_n и пространства конформной связности $C_{n,n}$, оснащенных в том или ином смысле. В. Д. Третьяков [15] в псевдоконформном пространстве ${}^{l}C_n$ рассматривает поверхность V_m, нормализованную гармонически; приводятся деривационные уравнения для этой поверхности, изучаются частные типы таких поверхностей. И. В. Парнасский [11] в полуконформном пространстве рассматривает m-мерную поверхность V_m; показано, что при соответствующем оснащении на поверхности V_m индуцируется полуконформная связность. Л. Ф. Филоненко [16] рассматривает распределение m-мерных линейных элементов в $(n\text{-}1)$-мерном конформном пространстве, используя, в основном, его проективную интерпретацию. Исследования А. Н. Михайловой [8] посвящены изучению некоторых вопросов линейных связностей на оснащенной гиперполосе конформного пространства. Т. Н. Глухова (Андреева) [14] исследует линейные связности (аффинные, конформные, нормальные), индуцируемые различными оснащениями гиперповерхности в конформном пространстве. А. М. Матвеевой в работе [7] разработаны основы теории линейных связностей на распределениях гиперплоскостных элементов в конформном пространстве C_n.

В дифференциальной геометрии важное место занимает теория связностей в расслоенных пространствах, а также ее применение при исследовании оснащенных подмногообразий, погруженных в различные пространства.

История теории связностей начинается с 1917 г. с работы Т. Леви-Чивита [23] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Г. Вейль [25] для построения единой теории поля ввел понятие пространства аффинной связности. Новый этап в развитии теории связностей открыли работы Э. Картана в 20-х годах XX века, в которых касательные векторные пространства заменялись аффинными, проективными или конформными пространствами. В середине XX века В. В. Вагнер [4] и Ш. Эресман [21] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве.

Для изучения геометрии многомерных поверхностей проективного пространства и других однородных пространств, фундаментальная группа которых является подгруппой проективной группы, А. П. Норден разработал метод нормализации [9], [10], который позволил в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Г. Ф. Лаптев [5], следуя идеям Э. Картана, линейные связности определяет как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, соответствующих касательным векторам базисного многообразия.

Понятие нормальной связности нормализованного подмногообразия в проективном пространстве ввел А. П. Норден [10] (внешняя связность). Большой вклад в развитие теории нормальных связностей внес А. В. Чакмазян [18], [19].

Объектом исследования настоящей работы являются гиперповерхность V_{n-1} пространства конформной связности $C_{n,n}$ и многомерная поверхность V_m, погруженная в конформное пространство C_n (псевдоконформное или собственно конформное), а также линейные связности (аффинные, нормальные, конформные), индуцируемые различными оснащениями (нормальным, касательным, полным) указанных поверхностей.

Теория конформного пространства C_n и вложенных в него поверхностей к настоящему времени разработана достаточно полно. Однако, изучение линейных связностей, индуцируемых различными оснащениями многомерных поверхностей, до настоящего времени оставались слабо изученными. Вопросы разработки теоретических и практических положений по изучению линейных связностей на оснащенной поверхности в конформном пространстве, а также гиперповерхности пространства конформной связности представляют большой научный интерес и являются актуальными в связи с возможными приложениями полученных результатов в математике, механике и физике.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является инвариантное построение основ теории линейных связностей, индуцируемых различными оснащениями многомерной поверхности V_m, погруженной в n-мерное конформное пространство C_n, а именно:

1) построение в разных дифференциальных окрестностях инвариантных внутренним образом определяемых нормальных, касательных, полных оснащений по-

верхности V_m в конформном пространстве C_n, а также гиперповерхности V_{n-1} пространства конформной связности $C_{n,n}$;

2) разработка основ теории линейных связностей (аффинных, нормальных, конформных), определяемых различными оснащениями рассматриваемых поверхностей;

3) приложение аффинной связности, индуцируемой нормальным оснащением многомерной поверхности V_m в C_n, к изучению геометрии сетей на подмногообразии V_m.

Методы исследования. Теория оснащенных многомерных поверхностей развивается инвариантными методами дифференциально-геометрических исследований, а именно, методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [5] и методом внешних дифференциальных форм Э. Картана [17]. Следует отметить, что результаты по теории линейных связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [5], [6].

Все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения, что позволило получить их в инвариантной форме. Рассмотрения в диссертации проводятся с локальной точки зрения. Все встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие), а при доказательстве теорем существования – аналитическими.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что изучением геометрии линейных связностей, индуцируемых оснащением многомерной поверхности конформного пространства и гиперповерхности пространства конформной связности, геометры раннее почти не занимались.

Использование аналитического метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева и исследование дифференциально-геометрических структур, индуцируемых полями фундаментальных и оснащающих объектов рассматриваемых подмногообразий, позволило получить новые существенные результаты в теории оснащенных гиперповерхности пространства конформной связности $C_{n,n}$ и многомерной поверхности конформного пространства C_n.

В диссертационной работе приведены доказательства всех основных выводов, которые сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при изучении геометрии различных многообразий, погруженных в пространства более общей структуры (например, в пространство конформной связности).

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева (2007–2010 гг.), на научно-практических конференциях преподавателей, докторантов и аспирантов Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева (2007–2010 гг.), на XXIV Всероссийской конференции обучающихся «Национальное достояние России» (Московская обл., п. Непецино, 2009 г.) (работа удостоена диплома I степени), на XLVII и XLVIII Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2009г. и 2010 г.), на 10-ой Международной конференции «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2009 г.), в Восьмой молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2009» (г. Казань, 2009 г.), на III Всероссийской научно-практической конференции «Фундаментальные науки и образование» (г. Бийск, Алтайский край, 2010 г.), на I Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2010» (г. Новосибирск, 2010), на Международной конференции «Геометрия в Одессе–2010» (г. Одесса, 2010), на Международной конференции «Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения» (г. Москва, 2010).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 18 печатных работах автора (см. [1]–[18]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика диссертации, содержание диссертации), трех глав и списка литературы, включающего 115 наименований. Полный объем диссертации составляет 121 страницу машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В <u>главе I</u> изучаются линейные связности на оснащенной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве конформной связности $C_{n,n}$.

В §§ 1, 2 главы I приводится материал, носящий реферативный характер и необходимый для дальнейшего изложения.

В § 3 записываются дифференциальные уравнения гиперповерхности V_{n-1} в $C_{n,n}$. В третьей дифференциальной окрестности построены 3 полных оснащения гиперповерхности, определенных внутренним образом.

§ 4 посвящен изучению аффинных связностей на нормально оснащенной гиперповерхности в пространстве конформной связности $C_{n,n}$. Показано, что при нормальном оснащении гиперповерхности в $C_{n,n}$ полем квазитензора $\{x_i^0\}$ индуцируется пространство аффинной связности $A_{n-1,n-1}$. Доказано, что вейлево пространство $A_{n-1,n-1} \equiv W_{n-1}$ является обобщенно римановым с полем метрического тензора g_{ij} тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор T_{ij}^0 (теорема I.4). Класс таких пространств не пуст; например, пространство аффинной связности $A_{n-1,n-1}$, индуцируемое нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$ полем любого из квазитензоров $\hat{a}_k$, $\overset{a}{\mathrm{A}}_k$ (a =1,2) третьего порядка. Показано, что при нормальном оснащении гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в эквиконформное пространство $\overset{0}{C}_{n,n}$, индуцируется риманово пространство $\overset{0}{A}_{n-1,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij} тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор $x^0_{[ij]}$ обращается в нуль; в частности, при нормальном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset \overset{0}{C}_{n,n}$ полем любого из квазитензоров $\hat{a}_k$, $\overset{a}{\mathrm{A}}_k$ $(a=1,2)$ третьего порядка пространство $\overset{0}{A}_{n-1,n-1}$ является римановым.

Путем преобразования структурных форм $\{\theta^j_0, \theta^j_i\}$ аффинной связности ∇ пространства $A_{n-1,n-1}$ найдены две аффинные связности $\hat{\nabla}$ и $\overline{\nabla}$, индуцируемые нормальным оснащением гиперповерхности V_{n-1} пространства конформной связности $C_{n,n}$; приведены строения компонент тензоров кривизны и кручения соответствующих пространств аффинной связности. Доказано, что аффинные связности ∇ и $\hat{\nabla}$, ∇ и $\overline{\nabla}$ сопряжены относительно полей тензоров соответственно a^n_{ij} и A_{ij} второго порядка (теоремы I.6 и I.7)

В § 5 главы I изучаются конформные связности, индуцируемые касательным и полным оснащениями гиперповерхности V_{n-1} пространства конформной связности $C_{n,n}$. Доказано, что инвариантное касательное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$ полем гиперсфер P_n индуцирует пространство конформной связности $C_{n-1,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij} (теорема I.8). Все точки каждого слоя пространства конформной связности $C_{n-1,n-1}$, индуцируемого при касательном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$ полем гиперсфер P_n, при перенесении Дарбу отображаются в точки квадрики Дарбу $Q^2_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$, получающейся пересечением гиперквадрики Дарбу $Q^2_n \subset \mathrm{P}_{n+1}$ с полярой точки P_n относительно этой гиперквадрики.

Показано, что если задано полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$ полями квазитензоров x^0_i, x^0_n, то индуцируется нормализованное пространство конформной связности $C_{n-1,n-1}$ (теорема I.10). В случае, когда полное оснащение подмногообразия V_{n-1} является невырожденным (то есть основной тензор нормализации a^0_{ik} невырожден), то индуцируется второе пространство конформной связности $\hat{C}_{n-1,n-1}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $C_{n-1,n-1}$ (теорема I.11); приведены строения компонент тензора кривизны-кручения пространства $\hat{C}_{n-1,n-1}$.

§ 6 посвящен изучению нормальных связностей на гиперповерхности V_{n-1} пространства конформной связности $C_{n,n}$. На нормально оснащенной гиперповерхности в расслоении окружностей $[P_i]$ найдены две нормальные связности $\hat{\nabla}^{\perp}$

и $\overline{\nabla}^{\perp}$; приведены строения тензоров кривизны-кручения соответствующих пространств. Доказаны следующие предложения (теоремы I.12, I.13):

– на нормально оснащенной полем квазитензора x_i^0 гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в пространство конформной связности $C_{n,n}$, в расслоении окружностей $[P_i]$ индуцируется нормальная связность $\hat{\nabla}^{\perp}$, определяемая системой форм $\{\Theta_n^0, \Theta_n^n\}$; форма $\{\Theta_n^n\}$ определяет подсвязность $\hat{\hat{\nabla}}^{\perp}$ связности $\hat{\nabla}^{\perp}$. Для каждого соответствующего пространства нормальной связности найдены строения тензоров кривизны-кручения;

– нормальная подсвязность $\hat{\hat{\nabla}}^{\perp}$ связности $\hat{\nabla}^{\perp}$, индуцируемой нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$, – плоская (то есть связность $\hat{\nabla}^{\perp}$ – полуплоская) тогда и только тогда, когда вейлево пространство $A_{n-1,n-1} \equiv W_{n-1}$ является обобщенно римановым с полем метрического тензора g_{ij}.

При одном частном преобразовании слоевых форм нормальной связности $\hat{\nabla}^{\perp}$ (тензор H_{nk}^n – нулевой) построена нормальная связность $\tilde{\nabla}^{\perp}$, найдено строение тензора кривизны-кручения соответствующего пространства нормальной связности. Построен охват тензора H_{nk}^0, при котором связность $\tilde{\nabla}^{\perp}$ определяется внутренним образом. Доказано (теорема I.15), что при этом охвате связности $\hat{\nabla}^{\perp}$ и $\tilde{\nabla}^{\perp}$, индуцируемые в расслоении окружностей $[P_i]$ при нормальном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$ полем квазитензора x_i^0, имеют одинаковые тензоры кривизны-кручения тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор T_{kl}^0.

Путем общего преобразования слоевых форм нормальной связности $\hat{\nabla}^{\perp}$ (тензор H_{nk}^n – ненулевой), которое возможно лишь при полном оснащении гиперповерхности V_{n-1} в $C_{n,n}$, получена другая нормальная связность $\overline{\nabla}^{\perp}$.

В <u>главе II</u> рассматриваются две аффинные связности на нормально оснащенной многомерной поверхности V_m в конформном пространстве C_n $(m < n-1)$ и получено приложение одной из них к изучению внутренней геометрии сетей на подмногообразии V_m.

В § 1 найдены дифференциальные уравнения m-мерной поверхности конформного пространства. Доказано, что с m-мерной поверхностью V_m $(m < n-1)$ n-мерного конформного пространства C_n инвариантным образом ассоциируется m-мерная гиперполоса кривизны H_m, для которой исходная поверхность является базисной.

В п. 3 § 1 в третьей дифференциальной окрестности построены 5 полных оснащений многомерной поверхности, определенных внутренним образом. Доказано, что нормальное оснащение поверхности $V_m \subset C_n$ при отображении Дарбу в пространстве P_{n+1} индуцирует взаимным и двойственным образом нормализованную регулярную m-мерную квадратичную гиперполосу $H_m \subset P_{n+1}$, для которой базисной поверхностью является образ $\tilde{V}_m \subset Q_n^2$ подмногообразия V_m и полем характеристик семейства касательных к Q_n^2 гиперплоскостей в точках $A_0 \in \widetilde{V}_m$ служит поле $(n-m)$-мерных плоскостей $\Pi_{n-m}(A_0) \equiv [A_0, A_\alpha]$ (теорема II.3).

§ 2 главы II посвящен аффинным связностям, индуцируемым нормальным оснащением поверхности V_m в конформном пространстве C_n. Доказано, что пространство аффинной связности $A_{m,m}$ без кручения, индуцируемое нормальным оснащением поверхности $V_m \subset C_n$, является вейлевым W_m с полем метрического тензора g_{ij} и дополнительной формой $\Theta = \omega_0^0 - x_k^0 \omega_0^k$; это пространство является эквиаффинным, а, следовательно, римановым тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор $x_{[ij]}^0$ (теорема II.4). Для пространства $A_{m,m}$ без кручения найдено строение тензора кривизны. Пространство аффинной связности $A_{m,m}$, индуцируемое нормальным оснащением поверхности $V_m \subset C_n$ полем любого из квазитензоров $\widetilde{M}_k$, $\overset{a}{A}_k$ $(a = \overline{1,4})$ третьего порядка, является римановым с полем метрического тензора g_{ij}.

С помощью преобразования структурных форм $\{\theta_0^j, \theta_i^j\}$ связности ∇ пространства $A_{m,m}$ получена вторая аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$, индуцируемая нормальным оснащением поверхности V_m в C_n; найдено строение компонент тензора кривизны-кручения соответствующего пространства $\overset{1}{A}_{m,m}$. Доказано, что аффинные связности ∇ и $\overset{1}{\nabla}$ сопряжены относительно поля симметричного тензора второго порядка A_{ij} (теорема II.6). Если пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{m,m}$ – без кручения, то вейлево пространство W_m является римановым тогда и только тогда, когда пространство $\overset{1}{A}_{m,m}$ является эквиаффинным (теорема II.7).

§ 3 посвящен приложению аффинной связности ∇ пространства $A_{m,m}$ к изучению внутренней геометрии сетей, заданных на многомерной поверхности V_m в конформном пространстве C_n.

В п. 1 § 3 приведены дифференциальные уравнения сети Σ_m на подмногообразии V_m, рассмотрены некоторые порождаемые ею инвариантные геометрические образы (псевдофокальные гиперсферы F_j^i ортогональной сети, гармонические гиперсферы F_i). Доказано, что поле гармонических $(n-m)$-сфер $[F_i]$ сети Σ_m, заданной на поверхности $V_m \subset C_n$, внутренним образом определяет нормальное оснащение поверхности V_m конформного пространства C_n (теорема II.9). Найден геометрический смысл гармонических гиперсфер ортогональной сети: каждая из m гармонических гиперсфер F_i ортогональной сети есть среднее арифметическое псевдофокальных гиперсфер F_j^i касательной $A_0 A_i$ к линии ω_0^i сети.

В п. 2 § 3 найдено необходимое и достаточное условие, при котором поверхность $V_m \subset C_n$ $(2 < m < n-1)$, несущая ортогональную сопряженную сеть Σ_m, является m-сопряженной системой (теорема II.10).

В п. 3 § 3 изучается сеть линий кривизны на поверхности V_m в конформном пространстве C_n; приведена геометрическая характеристика главных направлений и линий кривизны на многомерной поверхности V_m в C_n.

В п. 4 § 3 рассмотрено параллельное перенесение направления $A_0 A_i$ касательной к *i*-й линии ортогональной сети Σ_m на m-мерной поверхности V_m в конформном пространстве C_n вдоль ее *j*-й линии в аффинной связности ∇, индуцируемой нормальным оснащением поверхности $V_m \subset C_n$. Введены в рассмотрение геодезические и чебышевские сети в аффинной связности ∇, получены аналитические условия, характеризующие эти сети. Доказаны следующие предложения:

– если нормально оснащенная полем квазитензора x_i^0 поверхность $V_m \subset C_n$ несет ортогональную геодезическую сеть Σ_m в аффинной связности ∇, то она является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперсферами и данное оснащение будет нормальным оснащением полем ее гармонических $(n-m)$ сфер $[F_i]$ (теорема II.13);

– если ортогональная сеть $\Sigma_m \subset V_m \subset C_n$ есть сеть с совпавшими псевдофокальными гиперсферами, то при нормальном оснащении поверхности $V_m \subset C_n$ полем ее гармонических $(n-m)$ сфер $[F_i]$ данная сеть является геодезической относительно аффинной связности ∇ (теорема II.14);

– если нормально оснащенная полем квазитензора x_i^0 поверхность $V_m \subset C_n$ несет ортогональную чебышевскую сеть Σ_m в аффинной связности ∇, то эта сеть является геодезической, причем данная нормализация будет нормализацией полем гармонических $(n-m)$ сфер $[F_i]$ сети.

– поверхность $V_m \subset C_n$ $(2 < m < n-1)$ является поверхностью, несущей ортогональную сопряженную чебышевскую сеть Σ_m тогда и только тогда, когда она является m-сопряженной системой, несущей геодезическую сеть.

В п. 5 § 3 исследуются ортогональные сопряженные чебышевские сети на поверхности V_m в конформном пространстве C_n $(n > 4)$, а также приводится частный случай 2-мерной поверхности $V_2 \subset C_n$.

Доказаны теоремы существования рассмотренных классов сетей (теоремы II.8, II.11, II.17).

Глава III посвящена изучению нормальных и конформных связностей, индуцируемых оснащением многомерной поверхности V_m в конформном пространстве C_n.

В § 1 главы III рассматриваются конформные связности, индуцируемые касательным и полным оснащениями m-мерной поверхности V_m в конформном пространстве C_n.

В п. 1 § 1 доказано, что инвариантное касательное оснащение поверхности V_m конформного пространства C_n полем m-сфер $[P_\alpha]$ индуцирует пространство конформной связности $C_{m,m}$ с полем метрического тензора g_{ij}, определяемое системой $(m+2)^2$ форм Пфаффа; при этом пространство $C_{m,m}$ является эквиконформным, и имеют место аналоги тождеств Риччи (теорема III.1). Найдено строение тензора кривизны – кручения пространства конформной связности $C_{m,m}$. При перенесении Дарбу пространства C_n на проективное пространство P_{n+1} все точки каждого слоя пространства конформной связности $C_{m,m}$ отображаются в точки квадрики Q_m^2, получающейся при пересечении гиперквадрики Дарбу Q_n^2 с полярой $(n-m-1)$-мерной плоскости $[\mathrm{P}_\alpha] \subset \mathrm{P}_{n+1}$ относительно этой гиперквадрики (теорема III.2).

В п.п. 2, 3 § 1 доказано, что инвариантное полное оснащение поверхности V_m в C_n полями квазитензоров x_i^0, x_α^0 задает нормализацию пространства конформной связности $C_{m,m}$, определяемую полем $(n-m)$-сфер $[P_i]$ (теорема III.3). Если полное оснащение поверхности $V_m \subset C_n$ является невырожденным (то есть основной тензор a_{ij}^0 невырожден), то индуцируется второе пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{m,m}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $C_{m,m}$ (теорема III.4); приведены строения компонент тензора кривизны – кручения пространства $\overset{1}{C}_{m,m}$.

В начале § 2 главы III найдены слоевые формы $\{\Theta_\alpha^0, \Theta_\alpha^\beta\}$ нормальной связности $\nabla^\perp$, определяемой в расслоении поля $(n-m)$-сфер $[P_i]$ при нормальном оснащении поверхности V_m в C_n полем квазитензора x_i^0. Преобразование этих слоевых форм позволяет найти другую нормальную связность $\widetilde{\nabla}^\perp$, причем эти преобразования зависят от двух полей тензоров $\{H_{\alpha k}^\beta\}$ и $\{H_{\alpha k}^\beta, H_{\alpha k}^0\}$.

При $H_{\alpha k}^\beta=0$, $H_{\alpha k}^0 \neq 0$ нормальную связность $\widetilde{\nabla}^\perp$ обозначим через $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, при $H_{\alpha k}^\beta \neq 0$, $H_{\alpha k}^0 = H_{\alpha k}^\beta x_\beta^0$ связность $\widetilde{\nabla}^\perp$ обозначим $\overset{2}{\nabla}{}^\perp$. В каждом из этих случаев найдены строения компонент тензоров кривизны – кручения соответствующих пространств нормальной связности.

В п. 1 § 2 доказаны следующие предложения:

– если нормальная подсвязность $\overset{1}{\overline{\nabla}}{}^\perp$ связности $\nabla^\perp$, индуцируемая нормальным оснащением поверхности $V_m \subset C_n$, – плоская (то есть $\nabla^\perp$ – полуплоская), то вейлево пространство W_m – риманово; при $m = n-2$ утверждение имеет и обратную силу (теорема III.6);

– если нормальная подсвязность $\overset{3}{\overline{\nabla}}{}^\perp$ ($\overset{2}{\overline{\nabla}}{}^\perp$) связности $\nabla^\perp$, индуцируемая нормальным оснащением многомерной поверхности $V_m \subset C_n$, – плоская (полуплоская), то вейлево пространство W_m – риманово; при $m = n-2$ утверждение имеет и обратную силу;

– при $m = n-2$ нормальная подсвязность $\overset{3}{\overline{\nabla}}{}^\perp$ – плоская (то есть связность $\overset{2}{\overline{\nabla}}{}^\perp$ – полуплоская), если поверхность V_{n-2} в конформном пространстве C_n оснащена полем любого из квазитензоров $\widetilde{M}_k$, $\overset{a}{A}_k$ ($a = \overline{1,4}$) третьего порядка;

– при $m=n-2$ нормальная подсвязность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ – плоская (то есть связность $\nabla^{\perp}$ – полуплоская), если поверхность $V_{n-2}\subset C_n$ нормально оснащена полем любого из квазитензоров $\widetilde{M}_k$, $\overset{a}{A}_k$ $(a=\overline{1,4})$ 3-го порядка.

В п. 2 § 2 построен охват тензора $H^0_{\alpha k}$, при котором нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ определяется внутренним образом.

В п. 3 § 2 доказано, что нормальная связность $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением многомерной поверхности $V_m\subset C_n$ $(m<n-1)$ с заданным на ней полем ненулевого тензора $H^{\beta}_{\alpha k}$ с нулевыми компонентами H^n_{vk} и H^v_{nk}, допускающим обращение в нуль тензора $X^0_{\alpha k}\overset{def}{=}x^0_{\alpha k}-x^0_{\alpha}x^0_k-x^0_i\Lambda^i_{\alpha k}$, является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская (теорема III.9). Построен охват тензора $H^{\beta}_{\alpha k}$, при котором нормальная связность $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ определяется внутренним образом.

В § 3 главы III нормальные связности $\nabla^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ рассмотрены на регулярной квадратичной гиперполосе H_m в проективном пространстве P_{n+1}, ассоциированной с многомерной поверхностью V_m в конформном пространстве C_n.

В п. 1 § 3 в нормали первого рода $N_{n-m+1}\equiv\left[A_0,A_{\alpha},X'_{n+1}\right]$ гиперполосы H_m в P_{n+1} найдена инвариантная прямая $h\equiv\left[A_0,N_{n+1}\right]$, внутренним образом определяемая во второй дифференциальной окрестности.

В п. 2 § 3 найдено условие параллельности поля направлений $\left[A_0,M\right]$, принадлежащего полю нормалей первого рода квадратичной гиперполосы H_m в P_{n+1}, в нормальной связности $\nabla^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей поверхности $\widetilde{V}_m$ в P_{n+1}. Доказаны следующие предложения:

– при любом нормальном оснащении поверхности $V_{n-2}\subset C_n$ поле 2-мерных характеристик $\left[A_0,A_{n-1},A_n\right]$ гиперполосы $H_{n-2}\subset P_{n+1}$ параллельно переносится в нормальной связности $\nabla^{\perp}$ (теорема III.10); это утверждение сформулировано на языке конформного пространства (теорема III.10*): при любом нормальном оснащении поверхности $V_{n-2}\subset C_n$ поле 2-параметрической связки касательных гиперсфер $Q=\eta^{\alpha}A_{\alpha}+\eta^0A_0$ подмногообразия V_{n-2} параллельно переносится в нормальной связности $\nabla^{\perp}$;

– поле инвариантных прямых $h\equiv\left[A_0,N_{n+1}\right]$ на гиперполосе $H_m\subset P_{n+1}$, определяемое полем квазитензора x^0_i, является параллельным в нормальной связности $\nabla^{\perp}$ тогда и только тогда, когда тензор A^{α}_{n+1k} обращается в нуль (теорема III.11); это утверждение сформулировано на языке конформного пространства (теорема III.11*): поле инвариантных связок касающихся между собой в точках $A_0\in V_m$ гиперсфер $P=\xi^{n+1}N_{n+1}+\xi^0A_0$, определяемое полем квазитензора x^0_i, является параллельным в нормальной связности $\nabla^{\perp}$ тогда и только тогда, когда тензор A^{α}_{n+1k} обращается в нуль.

Условие параллельности поля направлений $[A_0, M]$, принадлежащего полю нормалей первого рода квадратичной гиперполосы H_m в P_{n+1}, записано также относительно нормальных связностей $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$; для этих связностей справедливы аналоги теорем III.10, III.11.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. В разных дифференциальных окрестностях построены инвариантные внутренним образом определяемые оснащения гиперповерхности V_{n-1} в пространстве конформной связности $C_{n,n}$ и многомерной поверхности V_m $(m < n-1)$ в конформном пространстве C_n.

2. Построены основы теории линейных связностей (аффинных, нормальных и конформных), индуцируемых различными оснащениями гиперповерхности V_{n-1} в $C_{n,n}$ и m-мерной поверхности V_m в C_n; в частности:

– доказано, что аффинная связность ∇, индуцируемая нормальным оснащением поверхности V_m в C_n, является вейлевой, найдено условие, при котором она является римановой; получена вторая аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$, индуцируемая тем же нормальным оснащением поверхности $V_m \subset C_n$;

– касательное оснащение многомерной поверхности V_m в C_n индуцирует пространство конформной связности $C_{m,m}$ с полем метрического тензора g_{ij}; оно является эквиконформным и выполняются аналоги тождеств Риччи;

– невырожденное полное оснащение m-мерной поверхности V_m в C_n индуцирует второе пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{m,m}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $C_{m,m}$;

– при $m = n-2$ найдены условия, при которых нормальные связности $\nabla^{\perp}$, $\overset{2}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ на вполне оснащенной поверхности V_m в C_n являются полуплоскими;

– получены условия параллельности гладкого поля направлений в нормальных связностях $\nabla^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$.

3. Найдено приложение аффинной связности ∇ к изучению внутренней геометрии сетей на подмногообразии V_m.

Список литературы

[1] Акивис М. А. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства / М. А. Акивис // Матем. сб. – М., 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.

[2] Акивис М. А. К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей / М. А. Акивис // Матем. сб. – М., 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.

[3] Бушманова Г. В. Элементы конформной геометрии / Г. В. Бушманова, А. П. Норден. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.

[4] Вагнер В. В. Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М. : МГУ, 1950. – Вып. 8. – С. 11–72.

[5] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев // Труды Моск. матем. о-ва : сб. ст. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

[6] Лаптев Г. Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Труды 3-го Всес. матем. съезда. – М., 1958. – Т. 3. – С. 409–418.

[7] Матвеева А. М. Линейные связности на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов в конформном пространстве / А. М. Матвеева // Известия вузов. Матем. – Казань, 2008. – № 7. – С. 79–84.

[8] Михайлова А. Н. Линейные связности на частично оснащенной гиперполосе конформного пространства / А. Н. Михайлова // ВИНИТИ РАН. – М., 2001. – № 719. – В2001. – 19 с.

[9] Норден А. П. О нормализованных поверхностях конформного пространства / А. П. Норден // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1950. – Т. 14. – № 2. – С. 105–122.

[10] Норден А. П. Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[11] Парнасский И. В. Связность на m-поверхностях полуконформного пространства / И. В. Парнасский // В сб. «Геометрия». –Л., 1976. – Вып. 5.– С. 95−100.

[12] Розенфельд Б. А. Дифференциальная геометрия образов симметрии / Б. А. Розенфельд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 59. – № 6. – С. 1057–1060.

[13] Столяров А. В. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения / А. В. Столяров. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2002. – 204 с.

[14] Столяров А. В. Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий / А. В. Столяров, Т. Н. Глухова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2007. – 180 с.

[15] Третьяков В. Д. К вопросу о гармонических нормализациях поверхностей в конформно-евклидовых пространствах / В. Д. Третьяков // Волжск. матем. сб. – 1968. – Вып. 6. – С. 247−253.

[16] Филоненко Л. Ф. Распределение m-мерных линейных элементов в конформном пространстве и присоединенные к нему связности / Л. Ф. Филоненко // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград, 1995. – Вып. 26. – С. 89–102.

[17] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[18] Чакмазян А. В. Подмногообразия проективного пространства с параллельным подрасслоением нормального расслоения / А. В. Чакмазян / Казанское мат.

об-во. 150 лет неевклидовой геометрии // Материалы Всес. геометр. конференции. – Казань, 1976. – С. 209.

[19] Чакмазян А. В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография / А. В. Чакмазян. – Ереван : Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116 с.

[20] Cartan E. Les éspaces á connexion conforme / E. Cartan // Ann. Soc. Polon. math. – 1923. – 2. – P. 171–211.

[21] Ehresmann C. Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie. – Bruxelles, 1950. – P. 29–55.

[22] Fialkov A. Conformal differential geometry of a subspace / A. Fialkov // Trans, Amer. Math. Soc. – 1944. – 56. – 309–433.

[23] Levi-Civita T. Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita // Rend. circ. Matem. – Palermo, 1917. – P. 173–205.

[24] Thomsen G. Űber konforme Geometrie I. Grundlagen der konformen Flachentheorie / G. Thomsen //Abhandl math. Semin. Univ. – Humburg, 1924. – 3. – P. 31–56.

[25] Weyl H. Raum. Zeit, Materie. – Berlin : Springer, 1923.

[26] Yano K. Sur les equation de Gaúss dans la géometrie conforme des espaces de Riemann / K. Yano // Proc. Imp. Akad. Japan. – 1939. – 15. – 247–252.

[27] Yano K. Sur les equation de Codazzi dans la géometrie conforme des espaces de Riemann / K. Yano // Proc. Imp. Akad. Japan. – 1939. – 15. – 340–344.

РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Зверева Т. В. Аффинные связности, индуцируемые нормальным оснащением гиперповерхности пространства конформной связности / Т. В. Зверева // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – 14 с. – № 144 – В2009Деп.

[2] Зверева Т. В. Конформные связности, индуцируемые касательным оснащением гиперповерхности пространства конформной связности / Т. В. Зверева // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – 12 с. – № 231 – В2009Деп.

[3] Зверева Т. В. Нормальные связности на гиперповерхности в пространстве конформной связности / Т. В. Зверева // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – 10 с. – № 331 – В2009Деп.

[4] Зверева Т. В. Аффинные связности на нормально оснащенной гиперповерхности пространства конформной связности / Т. В. Зверева // Сборник тезисов докладов участников XXIV Всероссийской конференции обучающихся «Национальное достояние России». – Минобрнауки РФ, Рособразование, РОСКОСМОС, РАО, НС «ИНТЕГРАЦИЯ», 2009. – С. 725.

[5] Зверева Т. В. Аффинные связности на гиперповерхности пространства конформной связности / Т. В. Зверева // Материалы XLVII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск, 2009. – С. 96–97.

[6] Зверева Т. В. Гиперполоса, ассоциированная с m-мерной поверхностью конформного пространства / Т. В. Зверева // Актуальные проблемы современной науки: труды 10-й международной конференции молодых ученых и студентов. Естественные науки. Части 1-3: Математика. Математическое моделирование. Механика. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2010. – С. 102–106.

[7] Зверева Т. В. Нормальные связности, индуцируемые нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_{n,n}$ / Т. В. Зверева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары: ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2009. – №1(13). – С. 8–15.

[8] Зверева Т. В. Аффинные связности, индуцируемые нормальным оснащением поверхности конформного пространства / Т. В. Зверева // Труды Матем-го центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Восьмой молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2009»; Казань 1 – 6 ноября 2009 г. – Казань: Казан. мат. об-во. – 2009. – Т. 39. – С. 228 – 230.

[9] Зверева Т. В. Сети на поверхностях в конформном пространстве / Т. В. Зверева // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – 24 с. – № 722 – В2009Деп.

[10] Зверева Т. В. Конформные связности на касательно оснащенной поверхности конформного пространства / Т. В. Зверева // Фундаментальные науки и образование: материалы III Всероссийской научно-практической конференции (Бийск, 31 января – 3 февраля 2010 г.) / Бийский пед. гос. ун-т им. В. М. Шукшина. – Бийск: БПГУ им. В. М. Шукшина. – 2010. – С. 57 – 64.

[11] Зверева Т. В. Внутренняя геометрия сетей на многомерной поверхности конформного пространства / Т. В. Зверева // Известия вузов. Матем. – Казань, 2010. – № 5. – С. 83–87.

[12] Зверева Т. В. О нормальной связности на оснащенной поверхности конформного пространства / Т. В. Зверева // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск, 2010. – С. –.

[13] Зверева Т. В. Связности, индуцируемые касательным оснащением поверхности конформного пространства / Т. В. Зверева // Сборник материалов I Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2010». В 3-х частях. Часть 2. – Новосибирск: Изд-во «СИБПРИНТ», 2010. – С. 150 – 154.

[14] Зверева Т. В. Нормальные связности, индуцируемые оснащением поверхности конформного пространства / Т. В. Зверева // ВИНИТИ РАН. – М., 2010. – 22 с. – № 236 – В2010Деп.

[15] Зверева Т. В. Аффинная связность и ее приложение к изучению внутренней геометрии сетей на поверхности в конформном пространстве / Т. В. Зверева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. – Чебоксары. – 2011. – № 2 (70). – Ч. 1. – С. 33 – 37.

[16] Зверева Т. В. О направлениях, параллельно переносимых в нормальных связностях на поверхности в конформном пространстве / Т. В. Зверева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. – Чебоксары. – 2011. – № 2 (70). – Ч. 1. – С. 38 – 41.

[17] Zvereva T. Translated directions in the normal connection on the surface of the conformal space / T. Zvereva // Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе – 2010». – Одесса. – 2010. – С. 95.

[18] ZverevaT. Translated directions on the surface of the conformal space / T. Zvereva // Geometry, topology, algebra and number theory, applications. The international conference dedicated to the 120th anniversary of B. N. Delone. Abstracts, august 16-20, 2010. – Moscow. – 2010. – p. 81.

Подписано к печати _______________ . Формат 60×84 / $_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ ____ .

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.